Colle du 11/01 - Sujet 1
Matrices et Analyse asymptotique

Question de cours.

1. Enoncer le développement en 0 à l'ordre 4 de $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$.
2. Démontrer la formule de Taylor-Young.

Exercice 1. Soit $f : x \mapsto (\cos(x))^{1/x}$. Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f est prolongeable par continuité en 0, que ce prolongement est dérivable en 0 et déterminer la position de f par rapport à sa tangente.

Exercice 2. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

Colle du 11/01 - Sujet 2
Matrices et Analyse asymptotique

Question de cours.

1. Enoncer le développement en 0 du $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 7.
2. Démonstration de la formule de la trace du produit.

Exercice 1. La fonction suivante f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui donner localement la position de la courbe par rapport à son asymptote.

$$f : x \mapsto \left(x^2 - 1\right) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Exercice 2. On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_n$.

1. Soient M et N deux matrices nilpotentes de même ordre p. Montrer que $M+N$ est nilpotente.
2. Soient M et N deux matrices nilpotentes. Montrer que $M+N$ est encore nilpotente.

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

Colle du 11/01 - Sujet 3
Matrices et Analyse asymptotique

Question de cours.

1. Enoncer le développement en 0 du ch à l'ordre 5.
2. Démontrer le théorème de primitivation des développements limités.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^p par $X^2 - 9X + 18$.
2. En déduire les puissances de A.

Exercice 2. Calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)}}$.